第 35 卷 第 4 期 延安大学学报(自然科学版) Vol. 35 No. 4
2016 年 12 月 Journal of Yanan University(Natural Science Edition) Dec. 2016
DOI: 10.13876/J.cnki.ydnse.2016.04.005

一个含有 Smarandache 可乘函数的混合均值

郭 瑞,赵西卿

(延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安 761000)

摘 要: 主要基于 Smarandache 可乘函数 $SM(n)$ 的性质及 Mangoldt 函数 $\Lambda(n)$ 的定义,运用初等和解析方法研究了 $\Lambda(n)\cdot SM(n)$ 和 $\Lambda(n)\cdot S(n)$ 的值性质,并得到了较强的渐近公式。

关键词: Smarandache 可乘函数; Mangoldt 函数; 均值; 渐近公式

中图分类号: O156 **文献标识码:** A **文章编号:** 1004-602X(2016)04-0005-03

1 引言及结论

对于给定的自然数 n,著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ [1,2] 定义为

$$S(n)=\min\{m: m\in\mathbf{N}, n\mid m!\}。\quad(1)$$

Mangoldt 函数 [3] 定义为对每一个整数 $n>1$,

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\log p & n=p^m, p\text{ 为素数}, m\geqslant 1。\\ 0, & \text{其它}。\end{cases}\quad(2)$$

令 m 是一个正整数,如果一个算术函数 $f(n)$ 满足 $f(m\cdot n)=\max\{f(m),f(n)\}$,其中 $(m,n)=1$,我们便称 $f(n)$ 为 Smarandache 可乘函数。显然,Smarandache 可乘函数不是可乘函数。因为当 p,q 为两个不同的素数时,$f(p^\alpha\cdot p^\beta)\neq f(p^\alpha)f(q^\beta)$。由定义可知 $S(n)$ 为 Smarandache 可乘函数。在文 [3] 中,Tabirca 证明了一个关于 Smarandache 可乘函数的有趣性质:如果 $f(n)$ 是 Smarandache 可乘函数,则 $g(n)=\min\{f(d): d\mid n, d\in\mathbf{N}\}$ 也是 Smarandache 可乘函数。设自然数 n 有标准因数分解式 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p^{\alpha_r^4}$,定义 Smarandache 可乘函数 $SM(n)$ 如下

$$SM(n)=\max\{SM(p_i^{\alpha_i}): i=1,2,3,\cdots,r\},\quad(3)$$

并且

$$SM(p_i^{\alpha_i})=\alpha_i p_i, i=1,2,3,\cdots,r。\quad(4)$$

徐哲峰博士在文 [4] 中,研究了 Smarandache 可乘函数 $SM(n)$ 的均值分布性质,并证明了渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(SM(n)-p(n))^2=\frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right),$$

其中 $\zeta(s)$ 为 Riemann zeta-函数。

朱民在文 [5] 中对 Smaeandache LCM 函数和 $\Lambda(n)$ 进行了研究,并得到一个很好的渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)SL(n)=x^2\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^{i-1}x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^k x}\right)。$$

乐茂华在文 [6] 中研究了当 $n=12$ 或者 $SL(n)=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}p$ 时有 $SL(n)=S(n)$,$S(n)\neq n$,其中 $p_1,p_2\cdots,p_k,p$ 表示不同的素数,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 是满足 $p>p_i^{\alpha_i}$,$i=1,2,\cdots,k$ 的正整数。

吕国亮在文 [7] 中讨论了对给定的整数 $k\geqslant 2$,则对任意实数 $x\geqslant 2$,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}d(n)\cdot SL(n)=\frac{\pi^4}{36}\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i x^2}{\ln^i x}+O\left|\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right|,$$

其中 $b_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算常数。

Gao Jing 在文 [8] 中研究了 Smarandache 双阶乘函数 $sdf(n)$ 与 Mangoldt 函数 $\Lambda(n)$ 的混合均值并证明了对任意实数 $x\geqslant 2$,有渐近公式

收稿日期: 2016-06-17
基金项目: 陕西省教育厅科研计划资助项目(2013JK0557);2016 年延安大学研究生教育创新计划项目(YCX201613)
作者简介: 郭 瑞(1990—),女,陕西榆林人,延安大学硕士研究生。

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n)Sdf(n)=x^2\left(\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{k-1}\frac{a_m}{\log^m x}\right)+O\left(\frac{x^2}{\log^k x}\right)。$$

本文利用素数定理及 Abel 等式对 $SM(n)$ 和 $\Lambda(n)$ 及 $S(n)$ 和 $\Lambda(n)$ 进行了研究,得到一个较强的渐近公式。

定理 1 对任意 $x\geqslant 1,k\geqslant 2$,有渐近公式:

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n)SM(n)=x^2\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^{i-1}x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^k x}\right),$$

其中 $c_i(i=1,2,3,\cdots,k)$ 为可计算常数且 $c_1=\frac{1}{2}$。

定理 2 对任意 $x\geqslant 1,k\geqslant 2$,有渐近公式:

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n)S(n)=x^2\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^{i-1}x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^k x}\right),$$

其中 $c_i(i=1,2,3,\cdots,k)$ 为可计算常数且 $c_1=\frac{1}{2}$。

2 相关引理

引理 1[1,9]:设 $x>1$ 为实数,则有

$$\pi(x)=\sum_{p\le x}1=\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $c_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是常数,并且 $c_1=1$。

引理 2[10]:(Abel 等式):对任一数论函数 $a(n)$,令 $A(x)=\sum_{n\le x}a(n)$,其中当 $x<1$ 时,$A(x)=0$;假设 f 在区间 $[x,y]$ 上有连续的导函数,其中 $0<y<x$,那么有

$$\sum_{n\le x}a(n)f(n)=A(x)f(x)-A(y)f(y)-\int_y^x A(t)f'(t)\,dt。$$

3 定理的证明

定理 1 的证明:

在和式 $\sum_{n\le x}\Lambda(n)SM(n)$ 中将区间 $[1,x]$ 分成两个集合 A 和 B,其中

$A=\{n:n=p,n\in[1,x]\}$,

$B=\{n:n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r},n\in[1,x]\}$。

利用 $\Lambda(n)$ 的定义,$[1,x]$ 的分法及 $SM(n)$ 的性质知:

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n)SM(n)=\sum_{n\in A}\Lambda(n)SM(n)+\sum_{n\in B}\Lambda(n)SM(n)。\quad(5)$$

当 $n\in A$ 时,有 $SM(n)=p,\Lambda(n)=\log p$。

则由引理 1,引理 2 得

$$\sum_{n\in A}\Lambda(n)SM(n)=\sum_{p\le x}p\cdot\log p$$
$$=x\log x\pi(x)-\int_{\frac{3}{2}}^{x}(\log t+1)\pi(t)\,dt$$
$$=\sum\frac{c_i x^2}{\ln^{i-1}x}-2\int_{\frac{3}{2}}^{x}(\ln t+1)\cdot\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i t}{\ln^i t}+O\left(\frac{t}{\ln^{k+1}t}\right)\right]dt+O\left(\frac{x^2}{\ln^k x}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i x^2}{\ln^{i-1}x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^k x}\right)$$
$$=x^2\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^{i-1}x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^k x}\right)。\quad(6)$$

当 $n\in B$ 时,此时 B 包括两种情况,$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_4}$ 是 n 的标准分解式,则有以下两种情况:

(1) $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r},r\geqslant 2$;(2) $n=p^{\alpha},\alpha\geqslant 2$。

当 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r},r\geqslant 2$ 时,由 $\Lambda(n)$ 的定义知,$\Lambda(n)=0$;从而 $\sum_{n\in B}\Lambda(n)SM(n)=0$。

当 $n=p^{\alpha},\alpha\geqslant 2$ 时,由 $\Lambda(n)$ 的定义知,$\Lambda(n)=\log p$;由 $SM(n)$ 的定义有 $SM(n)=\alpha p$。

所以

$$\sum_{n\in B}\Lambda(n)SM(n)=\sum_{p^{\alpha}\le x}\alpha p\log p=\sum_{p^{\alpha}\le x}\alpha p\ln p。\quad(7)$$

$$\sum_{2\le\alpha\le\ln x}\sum_{p\le x^{\frac{1}{\alpha}}}\alpha p\ln p\ll\sum_{2\le\alpha\le\ln x}\sum_{p\le x^{\frac{1}{2}}}\alpha p\ln p\ll 2x^{\frac{1}{2}}\ln x^{\frac{1}{2}}\le x\ln x。\quad(8)$$

结合(5),(6),(7),(8)有

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n)SM(n)=x^2\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^{i-1}x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^k x}\right)。$$

这样就完成了定理 1 的证明。

定理 2 的证明:

在和式 $\sum_{n\le x}\Lambda(n)S(n)$ 中将区间 $[1,x]$ 分成两个集合 P 和 Q,其中

$P=\{n:n=p,n\in[1,x]\}$,

$Q=\{n:n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r},n\in[1,x]\}$。

利用 $\Lambda(n)$ 的定义,$[1,x]$ 的分法及 $S(n)$ 的性质知:

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n)S(n)=\sum_{n\in P}\Lambda(n)S(n)+\sum_{n\in Q}\Lambda(n)S(n)。\quad(9)$$

当 $n\in P$ 时,有 $S(n)=p,\Lambda(n)=\log p$。

则由引理 1,引理 2 得

$$\sum_{n\in P}\Lambda(n)S(n)=\sum_{p\le x}p\log p$$
$$=x\log x\pi(x)-\int_{\frac{3}{2}}^{x}(\log t+1)\pi(t)\,dt$$

$$= \sum \frac{c_i x^2}{\ln^{i-1} x} - 2\int_{\frac{3}{2}}^{x} (\ln t + 1) \cdot$$

$$\left[\sum_{i=1}^{k} \frac{c_i t}{\ln^i t} + O\left(\frac{t}{\ln^{k+1} t}\right) \right] dt + O\left(\frac{x^2}{\ln^k x}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i x^2}{\ln^{i-1} x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^k x}\right)$$

$$= x^2 \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{\ln^{i-1} x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^k x}\right)。\qquad (10)$$

当 $n \in Q$ 时,此时 Q 包括两种情况,$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ 是 n 的标准分解式,则有以下两种情况:

(1) $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}, r \geqslant 2$; (2) $n = p^{\alpha}, \alpha \geqslant 2$。

当 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}, r \geqslant 2$ 时,由 $\Lambda(n)$ 的定义知,$\Lambda(n) = 0$; 从而 $\sum_{n \in Q} \Lambda(n) S(n) = 0$。

当 $n = p^{\alpha}, \alpha \geqslant 2$ 时,由 $\Lambda(n)$ 的定义知,$\Lambda(n) = \log p$; 由 $S(n)$ 的定义有 $S(n) = \alpha p$。

所以

$$\sum_{n \in Q} \Lambda(n) S(n) = \sum_{p^{\alpha} \leqslant x} \alpha p \log p$$

$$= \sum_{p^{\alpha} \leqslant x} \alpha p \ln p。\qquad (11)$$

$$\sum_{2 \leqslant \alpha \leqslant \ln x} \sum_{p \leqslant x^{\frac{1}{\alpha}}} \alpha p \ln p \ll \sum_{2 \leqslant \alpha \leqslant \ln x} \sum_{p \leqslant x^{\frac{1}{2}}} \alpha p \ln p \ll 2x^{\frac{1}{2}} \ln x^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant x \ln x。\qquad (12)$$

结合(9),(10),(11),(12)有 $\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) S(n) = x^2 \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{\ln^{i-1} x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^k x}\right)$。

这样就完成了定理 2 的证明。

参考文献:

[1] Apstol T M. Introduction to analytic number theory [M]. New York: Springer – Verlag, 1976.

[2] Smarandache F. Only problem, not solutions [M]. Chicago: xiquan Publishing House, 1993.

[3] Tabirca S. About S – multiplicative function [J]. Octogon, 1999, 7: 169 – 170.

[4] 徐哲峰. Smarandache 函数的值的分布性质 [J]. 数学学报, 2006, 49(5): 1009 – 1012.

[5] 朱民. 一个包含有 F. Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 的混合均值 [J]. 西南民族大学学报, 2013, 39(4): 564 – 566.

[6] Le Mao – hua. An equation concerning the Smarandache LCM function [J]. Smarancdache Notions Journal, 2004, 14: 186 – 188.

[7] 吕国亮. 关于 F. Smarandache LCM 函数与除数函数的混合均值 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(3): 315 – 318.

[8] Gao Jing, Liu Hua – ning. On the mean value of smarandache double factorial function [J]. Smarandache Notion Journal, 2004, 14(1): 193 – 195.

[9] 潘承洞, 潘承彪. 初等数论 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1992.

[10] 张文鹏. 初等数论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.

[责任编辑　毕　伟]

A Hybrid Mean Value Formula Involving Smarandache Multiplicative Function

GUO RUI, ZHAO Xi – qing

(College of Mathematics and Computer Science, Yan´an University, Yan´an 716000, China)

Abstract: Based on the properties of Smarandache multiplicative function SM(n) and the definition of Mangoldt function $\Lambda(n)$, the elementary and analytical methods were used to study the hybrid mean value formula involving Smarandache multiplicative function SM(n) and the Mangoldt function $\Lambda(n)$, and a sharp asymptotic formula was given.

Key words: Smarandache multiplicative function; Mangoldt function; hybrid mean value; asymptotic formula